УДК 519.6

И. И. Еремин, Д. А. Макарова, Л. В. Шульц

ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ И РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

1. Введение

Предметом исследований в данной работе будет математический объект P, соотнесенный пространству $\mathbb{R}^n$ и задаваемый (или идентифицируемый) понятиями:

$\mathbb{R}^n \supset M$ – *допустимое* множество,

$M \supset \widetilde{M}$ – *оптимальное* (эффективное) множество.

Задача состоит в отыскании $\tilde{x} \in \widetilde{M}$.

Пример 1. Рассмотрим задачу линейного программирования (ЛП)

$$L: \ \max\{(c,x) \,|\, Ax \le b, \ x \ge 0\}. \tag{1.1}$$

Можно положить $M := \{x \ge 0 \,|\, Ax \le b\}$, $\widetilde{M} :=$ Arg (1.1), где Arg (1.1) – обозначение оптимального множества задачи (1.1).

Пример 2. Пусть $M := \{x \ge 0 \,|\, Ax \le b\}$ и $\widetilde{M} := M$. Здесь исходным объектом является просто система линейных неравенств, любое решение которой является как допустимым, так и эффективным (по определению).

Пример 3. Положим $M :=$ Arg (1.1) и $\widetilde{M} := \arg\ \min\{\|x\|^2 \mid x \in M\}$, т. е. здесь в роли $\widetilde{M}$ выступает нормальное (минимальное по норме) решение задачи ЛП (1.1).

В данной статье мы сосредоточимся на ситуации примера 1 без предположений разрешимости задачи L. В литературе принята следующая классификация таких задач. Пусть $M^* = \{u \ge 0 \,|\, A^T u \ge c\}$ (напомним, что задача $L^*: \ \min\{(b,u) \,|\, u \in M^*\}$ называется двойственной к L). Тогда L

1) несобственная 1-го рода, если $M = \varnothing$, $M^* \ne \varnothing$;

2) несобственная 2-го рода, если $M \ne \varnothing$, $M^* = \varnothing$;

3) несобственная 3-го рода, если $M = \varnothing$, $M^* = \varnothing$ (см. [1, с. 13]).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 00-15-96041, 01-01-00563).

Случай $M \neq \varnothing$, $M^* \neq \varnothing$ соответствует разрешимости задачи L.

К несобственным задачам математического (в частности, линейного) программирования не могут быть применены классические определения корректности и устойчивости (см. [2, с. 129]).

Принятые определения, пусть для задачи (1.1), таковы. Пусть $y = [A, b, c]$ – вектор исходных данных, $M(y)$ – допустимое множество задачи, $\widetilde{M}(y)$ – ее оптимальное множество, т. е. $\widetilde{M}(y) = \mathrm{Arg}\ (1.1)$.

Определение 1. Задача (1.1) называется *α-корректной* по y в точке y_0, если

1) $\widetilde{M}(y) \neq \varnothing$ для всех y из некоторой окрестности V_0 точки y_0;

2) $\widetilde{M}(y_0)$ состоит из единственного вектора $\tilde{x}_0$;

3) из того, что $\{y_k\} \to y_0$, $y_k \in V_0$, $x_k \in \widetilde{M}(y_k)$, следует $\{x_k\} \to \tilde{x}_0$.

Определение 2. Задача (1.1) называется *β-корректной* по y в точке y_0, если выполнено условие 1 из предыдущего определения, а также из

$$\{y_k\} \to y_0, \quad y_k \in V_0, \quad x_k \in \widetilde{M}(y_k)$$

следует ограниченность последовательности $\{x_k\}$ и $\{x_k\}' \subset \widetilde{M}(y_0)$, здесь $\{x_k\}'$ – множество предельных точек последовательности $\{x_k\}$.

Определение 3. Пусть $\tilde{f}(y) := \ \mathrm{opt}\ (1.1)$. Задача (1.1) называется *$\tilde{f}$-устойчивой* по y в точке y_0, если функция $\tilde{f}(y)$ определена в некоторой окрестности V_0 точки y_0 и непрерывна в y_0.

В работе [3] первого из авторов было введено обобщенное понятие *устойчивости по некоторому свойству* ω (свойству исходной модели): модель P называется *ω-устойчивой*, если свойство ω сохраняется при малых вариациях исходных данных для P. Если, например, P – система линейных неравенств

$$Ax \leq b \tag{1.2}$$

и ω – свойство совместности этой системы, то ω-устойчивость означает, что малые изменения элементов множества $S = \{a_{ji}, b_j\}$ сохраняют свойство совместности системы (здесь a_{ji} – элементы матрицы A, $[b_1,\ \ldots,\ b_m]^T = b$, т. е. S – система исходных данных).

Если модель P – задача L, т. е. задача (1.1), а ω – свойство ее разрешимости, то ω-устойчивость означает сохранение свойства разрешимости при малых изменениях всей системы исходных данных.

Что касается разрешимых задач ЛП, то вопросы их устойчивости рассмотрены, например, в [4, гл. V]. В данной статье нас интересует ситуация, когда понятие ω-устойчивости применяется к несобственным задачам ЛП по родам ее несобственности (неразрешимости): ω_1 – свойство несобственности

1-го рода, ω_2 – 2-го рода и ω_3 – 3-го рода. Каждый из этих случаев требует своей идентификации на предмет ω_i-устойчивости, $i = 1, 2, 3$. Другой вопрос – это вопрос их регуляризации (рассматривается регуляризация по Тихонову). Всем этим постановкам и посвящена статья.

Материал этой статьи сформирован на основе магистерских диссертаций Д. А. Макаровой и Л. В. Шульц (Третьяковой) [5, 6], выполненных под научным руководством И. И. Еремина.

2. Предварительные сведения

Отметим, во-первых, что вопросами устойчивости разрешимых задач ЛП занимались многие авторы (см., например, [7–14]). Из работы [3] можно почерпнуть канонические и в кратких формулировках условия, идентифицирующие условия устойчивости разрешимых задач ЛП и разрешимых систем линейных неравенств, записанных в нескольких стандартных форматах.

2.1. Условия устойчивости систем линейных неравенств по признаку их совместности

Выпишем системы неравенств в разных форматах:

$$Ax \le b, \tag{2.1}$$

$$Ax \le b, \quad x \ge 0, \tag{2.2}$$

$$Ax = b, \quad x \ge 0, \tag{2.3}$$

$$Ax = b, \quad Bx \le d, \tag{2.4}$$

$$Ax = b, \quad Bx \le d, \quad x \ge 0. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1 [3]. *Каждая из совместных систем* (2.1)–(2.5) *устойчиво совместна тогда и только тогда, когда соответственно номеру этих систем выполняются условия*:

1. $Ax < b$ *совместна.*

2. $Ax < b,\ x \ge 0$ *совместна* (*это условие эквивалентно совместности системы* $Ax < b,\ x > 0$).

3.* *Ранг матрицы* A *равен* m *и система* $Ax = b,\ x > 0$ *совместна.*

4. *Ранг матрицы* A *равен* m *и система* $Ax = b,\ Bx < d$ *совместна.*

5. *Ранг матрицы* A *равен* m *и система* $Ax = b,\ Bx < d,\ x > 0$ *совместна.*

Замечание. Хотя системы (2.1)–(2.5) формально сводимы одна к другой, однако в проблематике устойчивости эти системы не эквивалентны.

*В [3] в формулировке теоремы 2 пропущено условие совместности системы $Ax = b$, $x > 0$.

2.2. Условия устойчивости разрешимых задач ЛП (по признаку разрешимости)

Задача ЛП допускает несколько стандартных форматов их записи, соответствующих форматам записи их систем ограничений (см. (2.1)–(2.5)). Здесь мы остановимся на формате (1.1).

Теорема 2.2. *Следующие условия эквивалентны:*

1°. *Задача* $L:\ \max\{(c,x)\,|\,Ax\le b,\ x\ge 0\}$ *устойчива (т. е. малые изменения элементов из* $S:=\{a_{ji},b_j,c_i\}_{\substack{j=1,\dots,m\\ i=1,\dots,n}}$ *сохраняют свойство разрешимости задачи).*

2°. *Задача* $L^*:\ \min\{(b,u)\,|\,A^Tu\ge c,\ u\ge 0\}$ *устойчива.*

3°. *Система*

$$\left.\begin{aligned}&Ax\le b,\quad A^Tu\ge c,\quad x\ge 0,\quad u\ge 0,\\ &(c,x)\ge(b,u)\end{aligned}\right\}$$

устойчива (при этом имеется в виду, что вариации показателей из системы исходных данных согласованы, если показатель в системе неравенств повторяется).

4°. *Множества* $\mathrm{Arg}\,L$ *и* $\mathrm{Arg}\,L^*$ *ограничены.*

5°. *Системы* $Ax<b,\ x\ge 0$ *и* $A^Tu>c,\ u\ge 0$ *совместны.*

6°. *Множество* $\mathrm{Arg}\,L$ *ограничено и система* $Ax<b,\ x\ge 0$ *совместна.*

7°. *Множество* $\mathrm{Arg}\,L^*$ *ограничено и система* $A^Tu>c,\ u\ge 0$ *совместна.*

Заметим, что понятия устойчивости задачи ЛП по свойству разрешимости и по свойству непрерывности функции $\tilde f(y)$ ($\tilde f$-устойчивости) в точке $[A_0,b^0,c^0]$ эквивалентны [4, гл. V].

Теорема 2.2 соотнесена к задаче ЛП в формате (1.1), при этом в перечне эквивалентностей используется (по крайней мере в явном виде в 5°–7°) формат ограничений в виде системы неравенств. Если же ограничения задачи ЛП содержат как неравенства, так и уравнения, то формулировки условий устойчивости существенно меняются, что видно уже по условиям устойчивости систем ограничений в теореме 2.1.

Поэтому наряду с условиями 1°–7° из теоремы 2.1 дадим их аналоги для задачи ЛП, в которой в системе ограничений содержатся наравне с неравенствами и уравнения. А именно, пусть

$$L_1:\ \max\{(c,x)\,|\,Ax\le b,\ Bx=d,\ x\ge 0\}. \tag{2.6}$$

Двойственной к ней будет

$$L_1^*:\ \min\{(b,u)+(d,v)\,|\,A^Tu+B^Tv=c,\ u\ge 0\}.$$

Можно для L_1 и L_1^* сформулировать вариант теоремы 2.2.

Теорема 2.3. *Следующие условия эквивалентны*:

1°. *Задача* L_1 *устойчива.*

2°. *Задача* L_1^* *устойчива.*

3°. *Система*

$$\begin{gathered} Ax \le b, \quad Bx = d, \\ A^T u + B^T v = c, \quad u \ge 0, \\ (c, x) \ge (b, u) + (d, v) \end{gathered}$$

устойчива.

4°. *Множества* $\operatorname{Arg} L_1$ *и* $\operatorname{Arg} L_1^*$ *ограничены.*

5°. *Системы* $Ax < b$, $Bx = d$ *и* $A^T u + B^T v = c$, $u > 0$, *совместны, при этом ранг матрицы* B *равен числу строк этой матрицы и ранг матрицы* $[A^T, B^T]$ *также равен числу ее строк.*

6°. *Множество* L_1 *ограничено и система* $Ax < b$, $Bx = d$ *совместна, при этом ранг матрицы* B *равен числу ее строк.*

7°. *Множество* L_1^* *ограничено и система*

$$A^T u + B^T v = c, \quad u > 0,$$

совместна, при этом ранг матрицы $[A^T, B^T]$ *равен числу ее строк.*

Эта теорема доказывается по аналогии с теоремой 2.2 с учетом условий из теоремы 2.1, обеспечивающих устойчивость систем (2.1)–(2.5).

Заметим, что если ранг матрицы A равен n, т. е. столбцы этой матрицы линейно независимы, то ранг матрицы $[A^T, B^T]$ (см. условие 7°) равен числу строк этой матрицы.

2.3. Скаляризация задач последовательного программирования с сохранением оптимального множества

В вопросах регуляризации неустойчивых задач оптимизации, равным образом и в вопросах *аппроксимативной регуляризации* несобственных задач, большую роль играет теорема об эквивалентной редукции задач последовательного программирования к задаче оптимизации с одной критериальной функцией [15]. Приведем частный случай общей теоремы из [15], касающейся сформулированной редукции.

Рассмотрим 3-ступенную задачу последовательного программирования с тремя критериальными функциями $d(x)$, $f(x)$ и $\Omega(x)$:

$$\min \{d(x) \mid x \in M_0\}, \tag{2.7}$$

$$\min \{f(x) \mid x \in \operatorname{Arg}\ (2.7)\}, \tag{2.8}$$

$$\boxed{\min\{\Omega(x)\,|\,x\in \mathrm{Arg}\ (2.8).} \tag{2.9}$$

Оптимальное множество заключительной задачи (2.9) и является оптимальным множеством (по определению) задачи $\{(2.7)–(2.9)\}$.

Пусть M_0 – выпуклый многогранник, $M_0\subset\mathbb{R}^n$, $M_0\neq\varnothing$; $d(x)$ и $f(x)$ – выпуклые на $\mathbb{R}^n$ кусочно-линейные функции, $\Omega(x)$ – выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция.

Теорема 2.4. *Если в сделанных предположениях задача* (2.9) *разрешима* ($\mathrm{Arg}\ (2.9)\neq\varnothing$)*, то при достаточно больших* $r>0$ *и* $R(r)>0$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{Arg}\ \min\{\underbrace{\Omega(x)+R\,[f(x)+r\,d(x)]}_{F(x)}\,|\,x\in M_0\}=\mathrm{Arg}\ (2.9). \tag{2.10}$$

Рассмотрим частный случай этого утверждения, соотнесенного к ситуации задачи (1.1). Положим

$$M_0:=\ \{x\geq 0\}\ (=\mathbb{R}^n_+),\quad *d(x)=|(Ax-b)^+|_{\max},\quad f(x)=(c,x),\quad \Omega(x)=\|x\|^2$$

(здесь $\alpha^+=\max\{0,\alpha\}$, $y^+:=\ [y_1,\dots,y_m]^+:=\ [y_1^+,\dots,y_m^+]$, $|y|_{\max}:=\ \max\limits_{(i)} y_i$).

Задачи (2.7)–(2.9) для этого случая будут выглядеть так:

$$\min\{|(Ax-b)^+|_{\max}\ \mid\ x\geq 0\}, \tag{2.11}$$

$$\max\{(c,x)\ \mid\ x\in\mathrm{Arg}\ (2.11)\}, \tag{2.12}$$

$$\boxed{\min\{\|x\|^2\ \mid\ x\in\mathrm{Arg}\ (2.12)\}.} \tag{2.13}$$

Понятно, что если система $Ax\leq b$, $x\geq 0$ совместна, то

$$\mathrm{Arg}\ (2.11)=\{x\,|\,Ax\leq b,\ x\geq 0\};$$

если задача $L:\ \max\{(c,x)\,|\,Ax\leq b,\ x\geq 0\}$ (это – задача (1.1)) разрешима, то $\mathrm{Arg}\ (2.12)=\mathrm{Arg}\ L$, а $\arg\ (2.13)$ является *нормальным* (т. е. минимальным по норме) решением задачи L. Таким образом, поиск нормального решения задачи L сводится к частному случаю задачи (2.10), а именно

$$\min_{x\geq 0}\{\|x\|^2-R\,[(c,x)-r\,|(Ax-b)^+|_{\max}]\}; \tag{2.14}$$

здесь разница в знаках с (2.10) объясняется тем, что исходная задача L является задачей на max.

Заметим, что разрешимость этой задачи обеспечивается без каких-либо предположений относительно разрешимости или неразрешимости задачи L. Задача (2.14) несет в себе (в несобственном случае) аппроксимационно-регуляризирующую роль. Этот вопрос подробнее обсуждается в разделе 4.

2.4. Корректность задачи минимизации выпуклой функции, зависящей от параметра

Рассмотрим задачу

$$\min_x f(x,y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m. \tag{2.15}$$

Относительно функции $f(x,y)$ сделаем следующие предположения:

1) $f(x,y)$ равномерно выпукла по x с единым модулем выпуклости $\delta(t)$ для $\forall y \in V_0$, где V_0 – некоторая окрестность фиксированной точки y_0; $\delta(t)$ – непрерывная и монотонная функция, $\delta(0) = 0$;

2) $\forall y \in V_0 : \min\limits_{(x)} f(x,y) \geq \gamma > 0$;

3) $f(x,y)$ непрерывна по $z = [x,y]$.

Теорема 2.5. *При предположениях* 1–3 *задача* (2.15) *α-корректна по y в точке y_0, т. е. из того, что $\{y_k\} \to y_0$, $y_k \in V_0$, $x_k \in$* $\operatorname{Arg}\,(2.15)\,|_{y=y_k}$, *следует, что $\{x_k\} \to \tilde{x}_0 =$* $\arg\,(2.15)\,|_{y=y_0}$.

Доказательство. Докажем вначале, что последовательность $\{x_k\}$ ограничена. Из предположения равномерной выпуклости $f(x,y)$ с единым модулем выпуклости $\delta(t)$ (условие 1) следует соотношение

$$(h_k, x_0 - x_k) \leq f(x_0, y_k) - f(x_k, y_k) - \delta(|x_0 - x_k|), \tag{2.16}$$

при этом $h_k \in \partial_x f(x_k, y_k)$. Так как $x_k = \arg \min\limits_{(x)} f(x, y_k)$, то $h_k = 0$. Из (2.16) получаем $\delta\left(|x_0 - x_k|\right) \leq f(x_0, y_k) - f(x_k, y_k)$, что, ввиду условия 2, дает

$$\delta\left(|x_0 - x_k|\right) \leq f(x_0, y_k) - \gamma \leq \sup_{y \in V_0} f(x_0, y) - \gamma =: \ \bar{\gamma} < +\infty.$$

Отсюда, в силу свойства $\delta(t)$, вытекает $\|x_0 - x_k\| \leq \delta^{-1}(\bar{\gamma})$, т. е. $\{x_k\}$ ограничена.

Далее, пусть $x' \in \{x_k\}'$, т. е. x' – предельная точка последовательности $\{x_k\}$. Так как $x_k = \arg\,(2.15)|_{y=y_k}$, то $\forall x : \ f(x_k, y_k) \leq f(x, y_k)$. Положив $x = x_0$, получим $\forall k : \ f(x_k, y_k) \leq f(x_0, y_k)$. Переход к пределу при $k \to +\infty$ дает неравенство $f(x', y_0) \leq f(x_0, y_0)$, т. е. $x' = \arg \min\limits_{(x)} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$. Следовательно, $x' = x_0$, т. е. $\{x_k\} \to x_0$. Теорема доказана.

Замечание. Задача (2.14) удовлетворяет всем условиям доказанной теоремы, если в (2.14) положить $y = [A, b, c]$.

3. Вопросы ω_0-устойчивости несовместной системы линейных неравенств общего вида

Поскольку идентификация ω_i-устойчивости тесно связана со свойством устойчивой неразрешимости системы линейных неравенств, то вначале рассмотрим именно этот вопрос.

3.1. Условие устойчивой несовместности системы линейных неравенств (ω_0-устойчивость)

Рассмотрим систему

$$Ax \le b. \tag{3.1}$$

Назовем устойчивость системы (3.1) по свойству ω_0 ее несовместности *ω_0-устойчивостью.*

Теорема 3.1 [4]. *Несовместная система* (3.1) *ω_0-устойчива тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная система $Ax \le 0$ имеет единственное решение* (*нулевое*).

Другой вариант формулировки этой теоремы: *несовместная система* (3.1) *ω_0-устойчива тогда и только когда, когда*

$$M_{\triangle b} := \ \{x \mid Ax \le b + \triangle b\} \ne \varnothing \Longrightarrow M_{\triangle b} \text{ ограничен.} \tag{3.2}$$

Эквивалент импликации (3.2) можно сформулировать через понятие всесторонней системы векторов $\{a_j\}_1^m \subset \mathbb{R}^n$. Система векторов $\{a_j\}_1^m$ называется *всесторонней*, если для любого $s \in \mathbb{R}^n$, $s \ne 0$ найдется индекс j' такой, что $(a_{j'}, s) > 0$.

Утверждение. *Несовместная система $Ax \le b$ ω_0-устойчива тогда и только тогда, когда совокупность строк матрицы A составляет всестороннюю систему векторов.*

Рассмотрим систему

$$Ax \le b, \quad x \ge 0. \tag{3.3}$$

Из теоремы 3.1 вытекает

Следствие. *Несовместная система* (3.3) *ω_0-устойчива тогда и только тогда, когда система $Ax \le 0$, $x \ge 0$ имеет единственное решение* (*нулевое*).

Известно [4, теорема 8.1], что необходимое и достаточное условие совместности системы $Ax \le b$ состоит в импликации

$$\sum_{j=1}^{m} u_j a_j^T = 0, \quad u_j \ge 0 \ \Longrightarrow (b, u) \ge 0,$$

где $\{a_j\}$ – строки матрицы A. Следовательно, условием ее несовместности является разрешимость системы

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^T u_j = 0, \qquad u_j \geq 0, \qquad (b,u) < 0. \tag{3.4}$$

Применительно к системе общего вида (с неравенствами и уравнениями)

$$Ax \leq b, \qquad Bx = d \tag{3.5}$$

условие совместности может быть записано в форме импликации

$$\sum_{j=1}^{m} u_j a_j^T + \sum_{i=1}^{k} v_i b_i = 0, \quad u_j \geq 0 \implies (b,u) + (d,v) \geq 0, \tag{3.6}$$

или

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} u_j a_j^T + \sum_{i=1}^{k} v_i \ (\pm b_i) = 0, \quad u_j \geq 0, \quad v_i \geq 0 \Longrightarrow \\ (b,u) + (d,v) \geq 0, \end{array}\right\}$$

т. е. в (3.6) требование неотрицательности вектора v мы ввели за счет возможности b_i писать как в форме $+b_i$, так и в форме $-b_i$. Выше $\{b_i\}$ – строки матрицы B, k – число строк в этой матрице. Из сказанного видно, что условие устойчивой несовместности системы (3.5) можно сформулировать в эквивалентной формулировке, а именно как условие совместной устойчивости системы

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} u_j a_j^T + \sum_{i=1}^{k} v_i \ (\pm b_i) = 0, \qquad [u,v] \geq 0, \\ (b,u) + (d,v) < 0. \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

Из (3.7) видно, что если $[\bar{u}, \bar{v}]$ – ее некоторое решение, то $[\bar{u}, \bar{v}] \neq 0$, поэтому можно считать, что $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j + \sum_{i=1}^{k} \bar{v}_i = 1$.

Теорема 3.2. *Несовместная система* (3.5) *устойчиво несовместна тогда и только тогда, когда однородная система*

$$Ax \leq 0, \quad Dx = 0 \tag*{$(3.5)_0$}$$

имеет единственное решение (*нулевое*).

Доказательство. Достаточность. Пусть система $(3.5)_0$ имеет единственное решение и вместе с тем $\exists\, A_k \to A$, $b_k \to b$, $D_k \to D$, $d_k \to d$ такие, что для всех k система

$$A_k x \le b_k, \qquad D_k x = d_k \tag{$(3.5)_k$}$$

совместна. Пусть x_k – ее решение. Можно считать $\dfrac{x_k}{\|x_k\|} \to s$, $\|\bar{x}\| = s$. Если последовательность $\{x_k\}$ неограничена, то из того, что x_k – решение системы $(3.5)_k$, при переходе к пределу получаем

$$As \le 0, \qquad Bs = 0 \qquad (s \ne 0),$$

что противоречит условию единственности решения (нулевого) системы $(3.5)_0$. Если же последовательность $\{x_k\}$ ограничена, то можно считать $\{x_k\} \to \bar{x}$. Переход к пределу в $(3.5)_k$ при $k \to +\infty$ дает

$$A\bar{x} \le b, \qquad B\bar{x} = d,$$

что противоречит несобственности системы (3.5).

Необходимость. Пусть система (3.5) устойчиво несовместна. Нужно доказать единственность решения (нулевого) системы $(3.5)_0$, или, что одно и то же, всесторонность системы векторов $\{a_j,\, \pm b_i\}$, где $\{a_j\}$ – строки матрицы A; $\{b_i\}$ – строки матрицы B. По теореме 2.1 (см. 2.4 и п. 5 в формулировке теоремы 2.1) условие устойчивой несовместности системы (3.5) можно записать в форме устойчивой разрешимости системы

$$A^T u + B^T v = 0, \qquad u \ge 0,$$

$$(b, u) + (d, v) < 0,$$

или в форме (3.7), как это уже пояснялось. Рассмотрим левую часть импликации (3.6):

$$\sum_{j=1}^{m} u_j a_j^T + \sum_{i=1}^{k} v_i\ (\pm b_i) = 0, \qquad [u, v] \ge 0, \tag{3.8}$$

при этом $\sum\limits_{j=1}^{m} u_j + \sum\limits_{i=1}^{k} v_i = 1$ (напомним, что $\{b_i\}$ – строки матрицы B). В силу устойчивой разрешимости системы (3.8) при условии выписанной нормировки на вектор $[u, v]$ можно утверждать, что при достаточно малых по норме

$x \in \mathbb{R}^n$ система

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} u_j(a_j - x) + \sum_{i=1}^{k} v_i\ (\pm b_i - x) = 0, \\ \sum_{j=1}^{m} u_j + \sum_{i=1}^{k} v_i = 1, \qquad [u,v] \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

будет совместной. Пусть $[\bar{u},\bar{v}]$ – ее решение. Подставив $[\bar{u},\bar{v}]$ в (3.9), получим

$$x = \sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j \bar{a}_j + \sum_{i=1}^{k} \bar{v}_i\ (\pm b_i),$$

т. е. $x \in \operatorname{cone}\{a_j,\ \pm b_i\}$. Так как в этом включении требование малости x (по норме) роли не играет, то включение справедливо для всех $x \in \mathbb{R}^n$, что означает, что $\operatorname{cone}\{a_j,\ \pm b_i\} = \mathbb{R}^n$, а это эквивалентно всесторонности системы векторов $\{a_j,\ \pm b_i\}$ или, как уже отмечалось, единственности решения системы $(3.5)_0$.

4. ω_i-устойчивость, $i = 1, 2, 3$

Напомним, что ω_i-устойчивость – это устойчивость неразрешимой задачи ЛП по свойству ω_i, где

ω_1 – свойство задачи быть несобственной 1-го рода,

ω_2 – свойство задачи быть несобственной 2-го рода,

ω_3 – свойство задачи быть несобственной 3-го рода.

4.1. Условия ω_1-устойчивости

Исходную задачу ЛП запишем в двух формах:

$$L_1: \ \max\{(c,x) \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} \tag{4.1}$$

и

$$L_2: \ \max\{(c,x) \mid Ax \leq b,\ Bx = d\}. \tag{4.2}$$

Им двойственные суть задачи

$$L_1^*: \ \min\{(b,u) \mid A^T u \geq c,\ u \geq 0\}, \tag*{(4.1)*}$$

$$L_2^*: \ \min\{(b,u) + (d,v) \mid A^T u + B^T v = c,\ u \geq 0\}. \tag*{(4.2)*}$$

Допустимые множества задач L_1 и L_1^* обозначим через M_1 и M_1^*, а для L_2 и L_2^* – через M_2 и M_2^*.

Вначале рассмотрим задачу L_1 с позиций ее ω_1-устойчивости, что соответствует свойству $M_1 = \varnothing$, $M_1^* \neq \varnothing$.

Теорема 4.1. *Неразрешимая задача L_1 ω_1-устойчива тогда и только тогда, когда система $Ax \leq 0$, $x \geq 0$ имеет единственное решение (нулевое).*

Доказательство. Необходимость. ω_1-устойчивость задачи L_1 означает, в частности, устойчивую несовместность системы

$$Ax \leq b, \qquad x \geq 0, \tag{4.3}$$

что эквивалентно единственности решения однородной системы $Ax \leq 0, x \geq 0$ (теорема 3.1).

Достаточность. Пусть система $Ax \leq 0$, $x \geq 0$ имеет единственное решение (нулевое). Тогда, с одной стороны, система (4.3) устойчиво несовместна (теорема 3.1), а с другой стороны, многогранник $M_1^{\triangle b} = \{x \,|\, Ax \leq b + \triangle b,\ x \geq 0\}$ ограничен, если $M_1^{\triangle} \neq \varnothing$. Следовательно, задача $\max\{(c + \triangle c, x) \,|\, x \in M_1^{\triangle b}\}$ разрешима при $\triangle c$ и тех $\triangle b$, которые обеспечивают $M_1^{\triangle b} \neq \varnothing$. Но это является эквивалентной характеризацией НЗ ЛП 1-го рода [4, с. 121]. Теорема доказана.

Из этой теоремы автоматически вытекает

Утверждение. *Если система (4.3) устойчиво несовместна, то L_1 – НЗ ЛП 1-го рода.*

Поскольку несовместность системы (4.3) влечет совместность системы

$$A^T u = 0, \qquad u \geq 0, \qquad (b, u) < 0, \tag{4.4}$$

то ω_1-устойчивость задачи L_1 можно охарактеризовать в следующей форме.

Теорема 4.2. *Неразрешимая задача (4.1) тогда и только тогда ω_1-устойчива, когда устойчиво совместна система (4.4) (или устойчиво совместна система $A^T u = 0$, $u \geq 0$, $(b, u) \leq -\varepsilon$, ε – любое положительное число).*

По аналогии с теоремой 4.1 доказывается

Теорема 4.3. *Неразрешимая задача (4.2) тогда и только тогда ω_1-устойчива, когда система*

$$Ax \leq 0, \qquad Bx = 0 \tag{4.5}$$

имеет единственное решение (нулевое).

Справедлив также аналог теоремы 4.2:

неразрешимая задача (4.2) ω_1-устойчива тогда и только тогда, когда система

$$\left.\begin{array}{c} A^T u + B^T v = 0, \qquad u \geq 0, \\ (b, u) + (d, v) < 0 \end{array}\right\} \tag{4.6}$$

устойчиво совместна.

4.2. Условия ω_2-устойчивости задач (4.1) и (4.2)

Исходные предположения в рассматриваемой ситуации таковы: $M_i \neq \varnothing$ и $M_i^* = \varnothing$, $i = 1, 2$. Поскольку ω_2-устойчивость задач L_1 и L_2 преобразуется в ω_1-устойчивость задач L_1^* и L_2^*, то аналог, например, теорем 4.1 и 4.3 будет звучать так.

Теорема 4.4. *Неразрешимые задачи* (4.1) *и* (4.2) *ω_2-устойчивы тогда и только тогда, когда каждая из систем $Ax \leq 0$, $x \geq 0$ и $Ax \leq 0$, $Bx = 0$ будет иметь единственное* (*нулевое*) *решение.*

Синтезируем сформулированные результаты в форме следующего утверждения.

Теорема 4.5. *Пусть L – произвольная несобственная задача ЛП, L^* – ей двойственная. Задача L ω_1-устойчива тогда и только тогда, когда L^* – ω_2-устойчива*; *L – ω_2-устойчива тогда и только тогда, когда L^* – ω_1-устойчива, при этом ω_1-устойчивость L эквивалентна единственности решения однородной системы, отвечающей системе ограничений задачи L, а ω_2-устойчивость задачи L эквивалентна единственности решения однородной системы, отвечающей системе ограничений задачи L^*.*

4.3. Вопрос об ω_3-устойчивости

В рассматриваемом случае $M_i = \varnothing$, $M_i^* = \varnothing$, $i = 1, 2$. Устойчивость по признаку ω_3 означала бы устойчивую несовместность систем $Ax \leq b$, $x \geq 0$ и $Ax \leq b$, $Bx = d$, но, как уже было отмечено, это означает, что задачи (4.1) и (4.2) являются несобственными задачами 1-го рода. Следовательно, справедлива

Теорема 4.6. *Класс ω_3-устойчивых задач ЛП пуст, т. е. если задача ЛП является несобственной* 3*-го рода, то существуют как угодно малые вариации ее исходных данных, превращающие эту задачу либо в разрешимую, либо в неразрешимую* 1*-го или* 2*-го рода.*

5. Аппроксимация и регуляризация несобственных задач ЛП

Под регуляризацией разрешимых задач математического программирования (моделей МП) так или иначе понимают такую модификацию модели, что модифицированная модель обладает тем или иным типом корректности (α-корректность, β-корректность или $\tilde{f}$-устойчивость, см. п. 1), при этом решение последней является либо решением исходной задачи, либо ее приближением (с контролируемой мерой точности). Одним из методов регуляризации является метод Тихонова, заключающийся в некоторый модификации целевой функции $f(x)$ в задаче математического программирования, точнее – в замене ее на $f(x \pm \alpha J(x))$, где α – малый положительный параметр; $J(x)$ – строго выпуклая (или равномерно выпуклая) функция.

С понятием регуляризации неразрешимой задачи, пусть задачи ЛП, дело обстоит сложнее. В начале статьи мы ввели понятие ω-устойчивости по некоторому свойству ω задачи ЛП.

Пусть, например, $\omega = \omega_1$, т. е. ω_1 – свойство несобственности 1-го рода. Формально, подвергнуть произвольную задачу ЛП регуляризации – это осуществить такую модификацию задачи, которая обеспечивает сохранение свойства ω_1 при малых изменениях исходных данных. Такое понимание регуляризации несобственных задач по многим соображениям является несостоятельным.

Мы введем понятие *аппроксимационной регуляризации*, состоящей в реализации 3-этапной задачи последовательного программирования. В основу анализа возьмем задачу ЛП

$$L: \max\{(c,x) \mid Ax \le b, \ x \ge 0\}. \tag{5.1}$$

Первый этап: аппроксимация системы ограничений задачи L согласно задаче

$$\min_{x \ge 0} |(Ax-b)^+|_{\max} \quad (=: \ t_0). \tag{5.2}$$

Второй этап: поиск максимума (c,x) на аппроксимационном множестве задачи (5.2), т. е.

$$\max\{(c,x) \mid x \in \mathrm{Arg}\ (5.2)\}. \tag{5.3}$$

Третий этап: поиск минимального по норме решения задачи (5.3), т. е.

$$\min\{\|x\|^2 \mid x \in \mathrm{Arg}\ (5.3)\}. \tag{5.4}$$

Вектор $\tilde{x} \in \mathrm{Arg}$ (5.4) будет выступать в роли *квазирешения* задачи L, т. е. (5.1). Заметим, что здесь переписаны задачи (2.11)–(2.13).

На самом деле задачи (5.2)–(5.4) могут быть синтезированы в единую оптимизационную задачу

$$\max_{x \ge 0}\{(c,x) - \alpha\,\|x\|^2 - r\,|(Ax-b)^+|_{\max}\}, \tag{5.5}$$

где α и r – положительные числовые параметры. Сказанное верно для НЗ ЛП 1-го рода. Точные результаты о связях задачи (5.4) с (5.5) будут сформулированы в п. 5.1.

5.1. Аппроксимация и регуляризация НЗ ЛП 1-го рода

Пусть L – НЗ ЛП 1-го рода, т. е.

$$M := \{x \geq 0 \,|\, Ax \leq b\} = \varnothing, \qquad M^* := \{u \geq 0 \,|\, A^T u \geq c\} \neq \varnothing.$$

Рассмотрим задачу последовательного программирования (5.2)–(5.4). Задача (5.2), очевидно, разрешима, при этом

$$\mathrm{Arg}\ (5.2) = \{x \geq 0 \,|\, Ax \geq b + \vec{t_0}\}, \tag{5.6}$$

где $\vec{t_0} = [\underbrace{t_0, t_0,\ \ldots,\ t_0}_{m}]^T$.

Лемма 5.1. *Если L – НЗ ЛП 1-го рода, то задача* (5.3) *разрешима.*

Доказательство. Задачу (5.3), в силу (5.6), можно переписать в форме

$$\max\{(c, x) \,|\, Ax \leq b + \vec{t_0},\ x \geq 0\}. \tag{5.7}$$

Поскольку ограничения ее совместны, то для ее разрешимости необходимо, чтобы ограничения двойственной к ней задачи были также совместны. Двойственная к (5.7) задача будет иметь вид

$$\min\{(b + \vec{t_0}, u) \ |\ A^T u \geq c,\ u \geq 0\}.$$

Но система ее ограничений, обозначенная нами ранее символом M^*, является совместной по исходному условию несобственности 1-го рода для L. Лемма доказана.

Итак, по доказанной лемме Arg (5.3) $\neq \varnothing$. Поэтому задача (5.4), являющаяся итоговой для 3-этапной задачи (5.2)–(5.4), разрешима.

Выпишем несколько преобразованную задачу (5.5) в форме (2.14), а именно

$$\min_{x \geq 0}\{\|x\|^2 - R\,[\,(c, x) - r\,|\,(Ax - b)^+|_{\max}\}. \tag{5.8}$$

Запишем задачу

$$\max_{x \geq 0}\{(c, x) - r\,|(Ax - b)^+|_{\max}\}, \quad r > 0. \tag{5.9}$$

Лемма 5.2. *Задача* (5.9) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$M^* = \{u \geq 0 \,|\, A^T u \geq c\} \neq \varnothing \ \ \& \ \ r \geq \min\left\{\sum_{j=1}^{m} u_j \,|\, u \in M^*\right\}. \tag{5.10}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (5.9) разрешима. Перепишем (5.9) в эквивалентном виде:

$$\max\{(c,x) - r\,t \;\mid\; Ax \le b + \vec{t},\; x \ge 0,\; \vec{t} \ge 0\}, \tag{5.11}$$

где $\vec{t} = [\underbrace{t,\;\ldots,\;t}_{m}]^T$. Двойственной к (5.11) будет задача

$$\min\left\{(b,u) \;\mid\; A^T u \ge c,\quad 0 \le \sum_{j=1}^{m} u_j \le r\right\} \tag{5.11*}$$

(проверяется по общей схеме формирования двойственности в ЛП [4, с. 90]). По теореме двойственности в ЛП из разрешимости (5.11) следует разрешимость $(5.11)^*$, а потому и совместность ее ограничений, что эквивалентно условию (5.10).

Достаточность. Пусть выполняются условия (5.10). Нужно доказать разрешимость задачи (5.9). Разрешимость задачи $(5.11)^*$ очевидна. Тогда разрешима и задача (5.11), являющаяся перезаписью задачи (5.9), т. е. задача (5.9) разрешима. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если* L *– НЗ ЛП 1-го рода, то задача* (5.9) *разрешима тогда и только тогда, когда* $r \ge \min\left\{\sum_{j=1}^{m} u_j \mid u \in M^*\right\}$.

Следствие 2. *Если* L *– НЗ ЛП 2-го или 3-го рода, то задача* (5.9) *при любом* $r > 0$ *не является разрешимой.*

Справедлива

Теорема 5.1. *Пусть* (5.1) *– НЗ ЛП 1-го рода и* $\tilde{x} = \arg\,(5.4)$. *Тогда при некоторых конструктивно определяемых* $r > 0$ *и* $R > 0$

$$\text{opt}\;(5.8) = \tilde{x}, \tag{5.12}$$

при этом задача (5.8) α*-корректна.*

Доказательство. Разрешимость задачи (5.4) предполагает разрешимость задач (5.2) и (5.3). Задача (5.2) разрешима очевидным образом, а (5.3) – в силу леммы 5.2. Что касается справедливости соотношения (5.12), то оно является частным случаем теоремы 2.4, в которой следует положить: $\Omega(x) = \|x\|^2$, $f(x) = (c,x)$, $d(x) = |(Ax-b)^+|_{\max}$ (см. соотношение (2.10)).

5.2. Аппроксимация и регуляризация НЗ ЛП 2-го рода

В предположении несобственности для L 2-го рода задача

$$L^* : \ \min\{(b,u) \mid A^T u \geq c, \ u \geq 0\} \tag{5.13}$$

является НЗ ЛП 1-го рода. Следовательно, для (5.13) можно сформировать аналог теоремы 5.1. Мы только укажем на вид задачи (5.8), а также (5.5), являющихся α-корректными, но отнесенных к задаче L^*:

$$\min_{u\geq 0}\{\|u\|^2 + R\,[(b,u) + r\,|(c - A^T u)^+|_{\max}]\}; \tag{5.14}$$

$$\min_{u\geq 0}\{(b,u) + \alpha\,\|u\|^2 + r\,|(c - A^T u)^+|_{\max}\}. \tag{5.15}$$

Задача (5.15) – это преобразованный вид задачи (5.14). Задача (5.14) при подходяще выбранных $r > 0$ и $R > 0$ определяет квазирешение задачи L^*, пусть $\tilde{u}$. Вектор $\tilde{u}$ лежит, естественно, во множестве $\operatorname{Arg}\min\limits_{u\geq 0} |(c - A^T u)^+|_{\max}$. Совместная система

$$A^T u \geq c - \widetilde{\triangle c}, \qquad u \geq 0, \tag{5.16}$$

выступает в качестве аппроксимирующей для L^*, здесь $\widetilde{\triangle c} := \ (c - A^T\tilde{u})^+$. Выпишем задачу

$$\max\{(c - \widetilde{\triangle c}, x) \mid Ax \leq b, \ x \geq 0\} \tag{5.17}$$

и ей двойственную

$$\min\{(b,u) \mid A^T u \geq c - \widetilde{\triangle c}, \ u \geq 0\}. \tag{5.17*}$$

Поскольку системы ограничений этих задач совместны, то (5.17) и (5.17)* разрешимы. Задаче (5.17) поставим в соответствие *аппроксимационно-регуляризованную* задачу

$$\max_{x\geq 0}\{(c - \widetilde{\triangle c}, x) - \alpha\,\|x\|^2 - r\,|(Ax - b)^+|_{\max}\}, \tag{5.18}$$

являющуюся α-корректной (см. (5.5)), т. е. если

$$\{c_k\} \to c, \ \ \{\triangle_k\} \to \widetilde{\triangle c}, \ \ \{A_k\} \to A, \ \ \{b_k\} \to b,$$

то $\{\tilde{x}^k\} \to \tilde{x}$, где $\tilde{x} = \arg\,(5.18)$, $\tilde{x}^k = \arg\,(5.18)$ при подстановке вместо $Y := \ [A, b, c, \widetilde{\triangle c}]$ вектора $Y_k := \ [A_k, b_k, c_k, \triangle_k]$.

Следовательно, если $\triangle_k := \ (c - A^T u_k)^+$ и u_k – приближенное решение α-корректной задачи (5.14), то для определения приближенного значения для квазирешения $\tilde{x}$ исходной задачи (5.1) необходимо в (5.18) вместо $\widetilde{\triangle c}$ подставить $\triangle_k$ и найти приближенное решение $\tilde{x}_k$. Чем точнее будет вычисляться u_k, тем точнее можно вычислить $\tilde{x}_k$.

Подведем итог.

1°. В случае несобственной задачи 2-го рода под ее квазирешением $\tilde{x}$ понимается решение задачи (5.18), в которой $\widetilde{\triangle c} = (c - A^T\tilde{u})^+$ и $\tilde{u} = \arg$ (5.14), при этом (5.14) и (5.18) – α-корректные задачи, реализующие свертки 3-ступенных задач оптимизации.

2°. Устойчивый процесс вычисления квазирешения $\tilde{x}$ осуществляется в форме двух этапов: первый этап – нахождение приближенного решения u_k задачи (5.14) и вычисление $\triangle_k = (c - A^T u_k)^+$; второй этап – нахождение приближенного решения $\tilde{x}_k$ задачи (5.18), в которой вместо $\widetilde{\triangle c}$ подставлено $\triangle_k$.

5.3. Аппроксимация и регуляризация НЗ ЛП 3-го рода

Исходное предположение рассматриваемого случая

$$M = \{x \geq 0 \,|\, Ax \leq b\} = \varnothing, \qquad M^* := \{u \geq 0 \,|\, A^T u \geq c\} = \varnothing.$$

Построим вначале аппроксимационные множества для систем ограничений задач L и L^*:

$$\overline{M} = \operatorname{Arg}\min_{x\geq 0} |\,(Ax - b)^+|_{\max},$$

$$\overline{M}^* = \operatorname{Arg}\min |\,(c - A^T u)^+|_{\max}.$$

Если $\bar{x} \in \overline{M}$, $\bar{u} \in \overline{M}^*$, то, положив $\overline{\triangle b} = (A\bar{x} - b)^+$ и $\overline{\triangle c} = (c - A^T\bar{u})^+$, получим аппроксимационные системы

$$Ax \leq b + \overline{\triangle b}, \quad x \geq 0; \qquad A^T u \geq c - \overline{\triangle c}, \quad u \geq 0. \tag{5.19}$$

Такой выбор аппроксимационных систем неоднозначен (в силу неоднозначности выбора $\overline{\triangle b}$ и $\overline{\triangle c}$). Поэтому можно пойти на однозначный выбор $\overline{\triangle b}$ и $\overline{\triangle c}$ согласно правилу: пусть

$$\bar{\bar{x}} := \arg\min\{\|x\|^2 \,|\, x \in \overline{M}\},$$

$$\bar{\bar{u}} := \arg\min\{\|u\|^2 \,|\, u \in \overline{M}^*\}.$$

Положим

$$\widetilde{\triangle b} = (A\;\bar{\bar{x}}\; - b)^+, \qquad \widetilde{\triangle c} = (c - A^T\;\bar{\bar{u}}\;)^+. \tag{5.20}$$

Нахождение $\bar{\bar{x}}$ и $\bar{\bar{u}}$ можно подчинить задачам (по методу точных штрафных функций):

$$\min_{x\geq 0}\{\|x\|^2 + r\,|(Ax - b)^+|_{\max}, \tag{5.21}$$

$$\min_{u\geq 0}\{\|u\|^2 + R\,|(c - A^T u)^+|_{\max}. \tag{5.22}$$

После идентификации приращений $\overline{\triangle b}$ и $\overline{\triangle c}$, согласно (5.20), аппроксимационные модели для исходной задачи L, равным образом и L^*, запишутся в формах

$$\max\{(c - \widetilde{\triangle c}, x)\,|\,Ax \leq b + \widetilde{\triangle b},\ x \geq 0\}, \tag{5.23}$$

$$\min\{(b + \widetilde{\triangle b}, u)\,|\,A^T u \geq c - \widetilde{\triangle c},\ u \geq 0\}. \tag{5.23*}$$

Эти задачи разрешимы и взаимно двойственны. Нормальные решения $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$ и будут называться *квазирешениями* задач L и L^*. Эти решения будут идентифицированы регуляризованными моделями (по типу уже рассмотренных):

$$\max_{x\geq 0}\{(c - \widetilde{\triangle c}, x) - \alpha\,\|x\|^2 - r\,|(Ax - b - \widetilde{\triangle b})^+|_{\max}\}, \tag{5.24}$$

$$\min_{u\geq 0}\{(b + \widetilde{\triangle b}, u) + \beta\,\|u\|^2 + R\,|(c - \widetilde{\triangle c} - A^T u)^+|_{\max}\} \tag{5.25}$$

(выбор параметров $\alpha,\ r,\ \beta$ и R здесь не обсуждаем). Эти задачи, как мы уже знаем, являются α-корректными не только по всей системе исходных данных $A,\ b,\ c$, но и, очевидно, по $\widetilde{\triangle c}$ и $\widetilde{\triangle b}$.

Следовательно, нахождение приближенного значения для квазирешений задач L и L^* можно подчинить следующим этапам:

первый этап – нахождение приближенного значения x_k для нормального решения $\overline{\overline{x}}$, в силу задачи (5.21), а также нахождение приближенного значения u_k для нормального решения $\overline{\overline{u}}$, в силу задачи (5.22);

второй этап – нахождение приближенных решений задач (5.24) и (5.25) при замене в них $\widetilde{\triangle c}$ на $(c - A^T u_k)^+$ и $\widetilde{\triangle b}$ – на $(Ax_k - b)^+$.

Поскольку все вспомогательные задачи, с помощью которых отыскиваются квазирешения для L и L^*, являются α-корректными, то чем точнее решаются эти задачи, тем точнее получаются и квазирешения.

Замечание. В 5.3 был рассмотрен на самом деле общий случай, хотя нацеленность была на случай НЗ ЛП 3-го рода. Все сказанное здесь годится как для случая разрешимой задачи L, так и для любого случая несобственности. Мы ввели $\overline{\triangle b} = (a\bar{x} - b)^+$, $\bar{x} \in \overline{M}$ и $\overline{\triangle c} = (c - A^T\bar{u})^+$, $\bar{u} \in \overline{M}^*$. Справедливо простое

Утверждение. *Если*:

$\overline{\triangle b} = 0$ *и* $\overline{\triangle c} = 0$, *то* L *разрешима*;

$\overline{\triangle b} = 0$ *и* $\overline{\triangle c} \neq \varnothing$, *то* L *– НЗ ЛП 1-го рода*;

$\overline{\triangle b} \neq \varnothing$ *и* $\overline{\triangle c} = \varnothing$, *то* L *– НЗ ЛП 2-го рода*;

$\overline{\triangle b} \neq \varnothing$ *и* $\overline{\triangle c} \neq \varnothing$, *то* L *– НЗ ЛП 3-го рода.*

Литература

1. Еремин И. И., Мазуров Вл. Д., Астафьев Н. Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.

2. Еремин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976.

3. Еремин И. И. Общая теория устойчивости в линейном программировании // Изв. вузов. Математика. 1999. № 12 (451). С. 43–52.

4. Еремин И. И. Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: УрО РАН, 1999.

5. Макарова Д. А. Устойчивость разрешимых и неразрешимых задач линейного программирования: Дис. работа на степень магистра. Екатеринбург: УрГУ, 2002.

6. Шульц Л. В. (Третьякова) Аппроксимация и регуляризация несобственных задач линейного программирования: Дис. работа на степень магистра. Екатеринбург: УрГУ, 2002.

7. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1980.

8. Ашманов С. А. Линейное программирование. М.: Наука, 1981.

9. Левитин Е. С. Теория возмущений в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1992.

10. Тихонов А. Н., Рютин А. А., Агаян Г. М. Об устойчивом методе решения задачи линейного программирования с приближенными данными // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 5. С. 1058–1063.

11. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. М.: Факториал, 1998.

12. Васильев Ф. П. Критерий устойчивости в общей задаче линейного программирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1998. № 2. С. 17–20.

13. Васильев Ф. П. К вопросу об устойчивости методов регуляризации в линейном программировании // Там же. 1998. № 4. С. 19–23.

14. Васильев Ф. П., Антипин А. С. Методы невязки для решения неустойчивых задач равновесного программирования // Там же. 2001. № 2. С. 18–22.

15. Еремин Н. Н. О задачах последовательного программирования // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14, № 1. С. 53–63.

Статья поступила 21.04.2002 г.